www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع: ۱۰/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۲/۱۰/ ۱۰	
ویژه دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت دی ماه سال ۱۳۸۲		سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش وارزشیابی تحصیلی متوسطه	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	برای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$ ، با استفاده از اصل استقرا درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید : $۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\ldots\ldots+\frac{۱}{۲^n-۱}<\frac{n}{۲}$	۱/۵
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید ، اگر به مربع یک عدد فرد ۳ واحد اضافه کنیم عددی مضرب ۴ به دست می آید .	۱
۳	برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید : $\frac{a}{b^۲}+\frac{b}{a^۲}\geq\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$	۱/۲۵
۴	با استفاده از برهان خلف ثابت کنید : اگر $x\neq ۴$ و $x^۳+y^۳=۶۵$ آنگاه $y\neq ۱$ است.	۰/۷۵
۵	مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۲ مفروض است . پنج نقطه را در داخل مثلث در نظر می گیریم .نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله آن ها کمتر از ۱ است .	۱/۲۵
۶	با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید : $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$	۱
۷	اگر تساوی روبه رو برقرار باشد ، مجموعهٔ X راتعیین کنید . $[X\cap(B'\cap C')]\cup[X\cap(B\cup C)]=A$	۱
۸	اعضای رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x^۲+y^۲=۴\}$ را در Z به صورت مجموعه ای از زوجهای مرتب مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.	۱
۹	اگر $A=\{x+y,۶\}$ و $B=\{-۵,xy\}$ و $A\times B=B\times A$ باشد x و yرا تعیین کنید .	۱
۱۰	رابطهٔ R در $R^۲$ به صورت زیر تعریف شده است ، نشان دهید رابطه R یک رابطه هم ارزی است . $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow |a|+|b|=|c|+|d|$	۱/۵
۱۱	هر یک از اعداد طبیعی بازهٔ (۳۰و۲۰)را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارتها، یکی را به طور تصـــــادفی برمی داریم مطلوب است تعیین : **الف)** فضای نمونه ای این تجربهٔ تصادفی. **ب)** پیشامد A که در آن عدد روی کارت، عددی زوج باشد. **پ)** پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مضرب ۵ باشد. **ت)** پیشامد $A\cap B$. **ادامه سؤالات در صفحه‌ی دوم**	۱/۷۵

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۱۰/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۲/۱۰/ ۱۰	
ویژه دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت دی ماه سال ۱۳۸۲		سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش وارزشیابی تحصیلی متوسطه	

۱۲	۵ نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده اند با این حال ، امکان استخدام تنها برای ۵ نفر از آنها وجود دارد مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه : **الف**) ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند . **ب**) ۵ زن انتخاب شوند .	۱/۷۵
۱۳	یک سکه را ۴ بار پرتاب می کنیم مطلوبست احتمال اینکه حداقل ۳ بار رو بیاید .	۱
۱۴	فرض می کنیم $S = \{a,b,c,d\}$ مطلوبست $P(a')$ و $P(b)$ در صورتیکه داشته باشیم : $P(c) = P(d) = \frac{۱}{۴}$ و $P(a) = ۲P(b)$	۱/۵
۱۵	از بین اعداد حقیقی بین ۱- تا ۸ یک عدد بطور تصادفی انتخاب می شود . مطلوب است محاسبه‌ی احتمال آنکه این عدد بین ۲ و ۷/۸ انتخاب شده باشد.	۱/۵
۱۶	اگر $P(A) = \frac{۱}{۴}$ و $P(A \cup B) = \frac{۲}{۳}$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند ، $P(B)$ را حساب کنید . « موفق باشید »	۱/۲۵
	جمع نمرات	۲۰

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۲/۱۰/۱۰
ویژه دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت دی ماه سال ۱۳۸۲	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش وارزشیابی تحصیلی متوسطه

ردیف	راهنمای تصحیح
۱	$\begin{cases} n=3 \quad P(3): 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}<\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{31}{21}<\frac{3}{2} & (0/25) \\ n=K \quad P(K): 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^K-1}<\frac{K}{2} & (0/25) \end{cases}$ $n=K+1 \quad P(K+1): 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^K-1}+\frac{1}{2^{K+1}-1}<\frac{K+1}{2}$ حکم استقرا $(0/25)$ به طرفین فرض عبارت $\frac{1}{2^{K+1}-1}$ را اضافه می کنیم $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^K-1}+\frac{1}{2^{K+1}-1}<\frac{K}{2}+\frac{1}{2^{K+1}-1}<\frac{K+1}{2}$ $(0/25)$ $\frac{K}{2}+\frac{1}{2^{K+1}-1}<\frac{K}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2^{K+1}-1}<\frac{1}{2}$ $(0/25) \quad \Rightarrow \quad 2^{K+1}-1>2 \Rightarrow 2^{K+1}>3$ این نامعادله همواره برقرار است پس حکم برقرار است. (۰/۲۵)
۲	$x=2k+1 \quad (0/25)$ $x^2+3=(2k+1)^2+3=4k^2+4k+1+3=4(k^2+k+1)=4k' \; (0/25)$ $(0/25) \quad (0/25)$
۳	$(0/25) \quad (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \quad a^2+b^2-ab-ab \geq 0 \Rightarrow$ $a^2+b^2-ab \geq ab \Rightarrow \quad (0/25)$ $(a^2+b^2-ab)(a+b) \geq ab(a+b)$ (۰/۲۵)طرفین این نا معادله را در $(a+b)$ ضرب می کنیم $a^2+b^2 \geq a^2b+ab^2 \Rightarrow$ طرفین این نا معادله را بر a^2b^2 تقسیم می کنیم (۰/۲۵) $\frac{a^3}{a^2b^2}+\frac{b^3}{a^2b^2} \geq \frac{a^2b}{a^2b^2}+\frac{ab^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $(0/25)$
٤	از برهان خلف استفاده کرده و می گوییم اگر $y \neq 1$ نباشد پس $y=1$ (۰/۲۵) $y=1 \Rightarrow x^3+(1)^3=65 \quad \rightarrow x^3=64 \Rightarrow x=4 \quad (0/25)$ این تساوی با فرض مسئله تناقض دارد پس حکم برقرار است یعنی $y \neq 1$ (۰/۲۵) **ادامه در صفحه‌ی دوم**

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه سالی – واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۲/۱۰/ ۱۰
ویژه دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت دی ماه سال ۱۳۸۲	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش وارزشیابی تحصیلی متوسطه

۵ اوساط اضلاع مثلث را بدست آورده و به یکدیگر وصل می کنیم در این صورت مثلث اصلی به ٤ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ تقسیم می شود(۰/۲۵) اگر ۵ نقطه را به منزلهٔ کبوترو ٤ مثلث ایجاد شده را به منزلهٔ لانه کبوتر در نظر بگیریم (۰/۲۵) چون ۴<۵ طبق اصل لانه کبوتر ، اگر ٤ نقطه هر کدام داخل یک مثلث قرار می گیرند پس نقطهٔ پنجم باید در یکی از مثلث ها قرار بگیرد (۰/۲۵) پس حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه فاصله شان کمتر از ۱ است (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

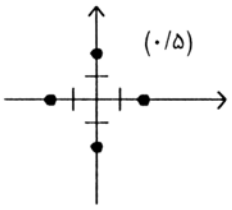


٦ طرف اول $= (A \cup B) - C =$
$(A \cup B) \cap C'$ (۰/۲۵) =
$[(A \cap C') \cup (B \cap C')]$ (۰/۵) =
$(A - C) \cup (B - C)$ (۰/۲۵) = طرف دوم

۷
$[X \cap (B' \cap C')] \cup [X \cap (B \cup C)] = A \Rightarrow$
$[X \cap (B \cup C)'] \cup [X \cap (B \cup C)] = A$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$
$X \cap [(B \cup C)' \cup (B \cup C)] = A$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$
$X \cap (U) = A$ (۰/۲۵) $\Rightarrow X = A$ (۰/۲۵)

۸ $R = \{(-۲,۰),(۲,۰),(۰,-۲),(۰,۲)\}$ (۰/۵)

(۰/۵)



۹ $A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$ (۰/۲۵)
$\{x+y,۶\} = \{-۵, xy\} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-۵ \\ xy=۶ \end{cases} \begin{matrix} x=-۲ \\ y=-۳ \end{matrix}$ (۰/۵)
(۰/۲۵)

ادامه در صفحه‌ی سوم

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۲/۱۰/ ۱۰
ویژه دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت دی ماه سال ۱۳۸۲	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش وارزشیابی تحصیلی متوسطه

۱۰

$(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow |a|+|b| = |a|+|b|$ (۱) (۰/۲۵)

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow |a|+|b| = |c|+|d| \Rightarrow |c|+|d| = |a|+|b| \Leftrightarrow (c,d)R(a,b)$ (۲) (۰/۵)

$$\begin{cases} (a,b)R(c,d) \text{ و } (c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f) \\ \begin{cases} (a,b)R(c,d) \Leftrightarrow |a|+|b| = |c|+|d| \\ (c,d)R(e,f) \Leftrightarrow\Rightarrow |c|+|d| = |e|+|f| \end{cases} \Rightarrow |a|+|b| = |e|+|f| \Rightarrow (۰/۵) \quad (۳) \end{cases}$$

از روابط (۱)و (۲) و (۳) نتیجه می گیریم R یک رابطهٔ هم ارزی است . (۰/۲۵)

۱۱

الف) $S = \{۲۱ , ۲۲ , ۲۳ , ۲۴ , ۲۵ , ۲۶ , ۲۷ , ۲۸ , ۲۹\}$ (۰/۵) ب) $A = \{۲۲ , ۲۴ , ۲۶ , ۲۸\}$ (۰/۵)

پ) $B = \{۲۵\}$ (۰/۲۵)

ت) $A \cap B = \{۲۲ , ۲۴ , ۲۶ , ۲۸\} \cap \{۲۵\} = \{\}$ (۰/۵)

۱۲

$n(s) = \binom{۱۱}{۵}$ (۰/۲۵)

الف: $n(A) = \binom{۵}{۳}\binom{۶}{۲}$ (۰/۲۵) $P(A) = \dfrac{\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۵}} = \dfrac{۲۵}{۷۷}$ (۰/۵)

ب: $n(B) = \binom{۵}{۵}\binom{۶}{۰}$ (۰/۲۵) $P(B) = \dfrac{\binom{۵}{۵}\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۱}{۵}} = \dfrac{۱}{۴۶۲}$ (۰/۵)

۱۳

$n(s) = ۲^۴$ (۰/۲۵)

$n(A) = \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴}$ (۰/۲۵)

$P(A) = \dfrac{\binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴}}{۲^۴} = \dfrac{۵}{۱۶}$ (۰/۵)

ادامه در صفحه‌ی چهارم!

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۲/۱۰/ ۱۰
ویژه دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت دی ماه سال ۱۳۸۲	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش وارزشیابی تحصیلی متوسطه

۱۴

$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=1$ (۰/۲۵)

$2P(b)+P(b)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ (۰/۲۵)

$3P(b)+\frac{1}{2}=1$

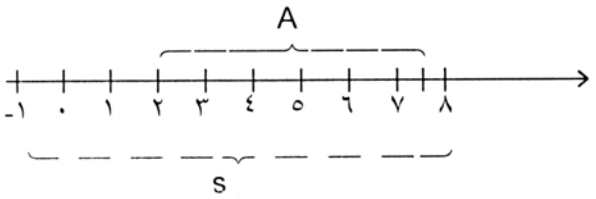
$3P(b)=\frac{1}{2}$ $p(b)=\frac{1}{6}$ (۰/۲۵)

$P(a)=2P(b)=2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$ (۰/۲۵)

$P(a')=1-P(a)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ (۰/۵)

۱۵

$S=[-1,8]$ $A=[2,7/8]$ (۰/۲۵)



$L(s)=8-(-1)=9$ (۰/۵)

$L(A)=7/8-2=5/8$ (۰/۵)

$P(A)=\frac{L(A)}{L(s)}=\frac{5/8}{9}$ (۰/۲۵)

۱۶

$A\cap B=\varphi$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ $P(A\cap B)=0$ (۰/۲۵)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (۰/۲۵) $\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+P(B)$ (۰/۲۵) $P(B)=\frac{5}{12}$ (۰/۲۵)

مصححین محترم

با عرض سلام و خسته نباشید ، لطفا برای راه حل های درست دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمائید .

با تشکر

www.alm.loxblog.com